Université de Haute-Alsace
2022/2023
Maths Renfort CPB1
Quentin Ehret *quentin.ehret@uha.fr*

Chapitre 1 : Nombres réels

L'objectif de ce premier chapitre est de rappeler certaines propriétés du corps des nombres réels $\mathbb{R}$ et de voir parmi celles-ci, celles qui seront essentielles dans les chapitres suivants.

1 Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels

Un corps est une notion algébrique qui désigne un ensemble muni d'une loi additive et d'une loi multiplicative vérifiant un certain nombre de conditions. En particulier, tout élément non nul doit admettre un inverse pour la loi multiplicative. Par exemple, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}$ sont des corps, mais $\mathbb{Z}$ n'en est pas un (qui serait l'inverse de 2 ?).

1.1 Définition et bizarrerie

Définition 1

On définit $\mathbb{R}$ comme étant l'ensemble des écritures décimales avec une infinité de nombre décimaux après la virgule qui ne se terminent pas par une infinité de 9.

Remarque. *Bien entendu, ce n'est pas cette définition qui est admise et utilisée par les mathématiciens. Il existe de nombreuses manières de définir et construire $\mathbb{R}$, mais aucune n'est à notre portée (voir la remarque finale du chapitre).*

La fin de la définition peut paraître surprenante : on va voir pourquoi cette condition est nécessaire. Supposons connues les lois habituelles $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$ (on précisera cela plus loin). Regardons alors $x = 0,999999... \in \mathbb{R}$. On a alors

$$10x = 9,9999... \in \mathbb{R}$$

et

$$9x = 10x - x = 9,00000... = 9 \in \mathbb{R}\,.$$

Ainsi,

$$9x = 9 \Longrightarrow x = 1!$$

On a donc l'égalité $0,9999... = 1$! Ces deux écritures représentent donc le même élément de $\mathbb{R}$ (exactement comme $\frac{5}{5} = 1$). C'est pour cela qu'il faut bannir ce type d'écritures de notre définition.
Pour vous convaincre que cette preuve est bien exacte, supposez que $0,9999... \neq 1$. Alors il existerait $y \in \mathbb{R}$ tel que $0,9999... < y < 1$. Quelles peuvent bien être les décimales de y ?

1.2 Propriétés arithmétiques de $\mathbb{R}$

Rien de très nouveau dans cette partie. On résume les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ que vous utilisez depuis toujours. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $a + b = b + a$ (commutativité de $+$) ;
2. $0 + a = a$ (0 est neutre pour $+$) ;

3. $a + b = 0 \Longleftrightarrow a = -b$;
4. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associativité de $+$) ;
5. $a \times b = b \times a$ (commutativité de $\times$) ;
6. si $a \neq 0$, alors $1 \times a = a$ (1 est neutre pour $\times$) ;
7. $a \times b = 1 \Longleftrightarrow a = b^{-1}$;
8. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (associativité de $\times$) ;
9. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (distributivité) ;
10. $a \times b = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ (intégrité).

1.3 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Définition 2

Si E est un ensemble, une **relation d'ordre** sur E, notée $\mathcal{R}$, est un sous-ensemble de $E \times E$ qui vérifie les trois points suivants. On notera

$$x \text{ est en relation avec } y \Longleftrightarrow x\mathcal{R}y \text{ pour } x, y \in E.$$

1. (Réflexivité) Pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$.
2. (Antisymétrie) Pour tous $x, y \in E$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y$.
3. (Transitivité) Pour tous $x, y, z \in E$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.

Une telle relation est dite **totale** si tous les éléments de E sont comparables, c'est à dire que pour tous $x, y \in E$, on a $x\mathcal{R}y$ ou bien $y\mathcal{R}x$.

Proposition 3

La relation $\leq$ est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{R}$.

En reformulant la définition précédente avec $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{R} =$ " $\leq$ ", on obtient :

1. Pour tout $x \in E$, $x \leq x$.
2. Pour tous $x, y \in E$, $(x \leq y$ et $y \leq x) \Longrightarrow x = y$.
3. Pour tous $x, y, z \in E$, $(x \leq y$ et $y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$.

Ces relations sont compatibles avec les opération $+$ et $\times$ de la manière suivante :

4. $x \leq y$ et $z \leq t \Longrightarrow x + z \leq y + t$;
5. $x \leq y$ et $z \geq 0 \Longrightarrow x \times z \leq y \times z$;
6. $x \leq y$ et $z \leq 0 \Longrightarrow x \times z \geq y \times z$.

Tout cela peut sembler trivial mais c'est une particularité de $\mathbb{R}$: sur $\mathbb{C}$ par exemple, il n'y a pas de telle relation d'ordre. On ne peut pas comparer $1 + i$ et $5 - 3i$ par exemple (c'est en partie pour cela qu'on introduit le module, qui lui est réel).

Définition 4

On définit le **maximum** et le **minimum** de deux réels x et y par

$$\max(x,y) = \begin{cases} x \text{ si } y \leq x \\ y \text{ si } x < y \end{cases}$$

$$\min(x,y) = \begin{cases} x \text{ si } x \leq y \\ y \text{ si } y < x \end{cases}$$

De même, si $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des réels, on définit leur maximum par

$$\max(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} \max(x_1, x_2, ..., x_n) \in \{x_1, ..., x_n\} \\ \max(x_1, x_2, ..., x_n) \geq x_i \quad \forall\, 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

1.4 Intervalles

Définition 5

Un **intervalle** de $\mathbb{R}$ est un sous ensemble I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall a, b \in I, \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \ (a \leq x \leq b) \Longrightarrow x \in I.$$

Par exemple, $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ entier sont des intervalles. On peut dire de manière informelle qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est un "morceau continu" de $\mathbb{R}$.

Définition 6

Un **intervalle ouvert** est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, \ \ a < x < b\} \qquad \text{avec } a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\,.$$

Remarque. *Un intervalle ouvert est bien un intervalle ! Si $a', b' \in]a, b[$, et si x est tel que $a' \leq x \leq b'$, alors*

$$a < a' \leq x \leq b' < b,$$

donc $x \in]a, b[$.

2 Partie entière et valeur absolue

2.1 Partie entière

$\mathbb{R}$ est **archimédien**, *ie* pour tout réel x, il existe un entier naturel strictement plus grand que x.

Définition 7

Si $x \in \mathbb{R}$, on définit sa partie entière, notée $E(x)$ ou bien $\lfloor x \rfloor$, comme l'unique entier tel que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Remarque. *En anglais, on dit **floor function**.*

Exemples : $E(2,4) = 2$; $E(\pi) = 3$; $E(-3,5) = -4$.

Preuve de l'unicité. Soient $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $k \leq x < k+1$ et $l \leq x < l+1$. Alors on a $k \leq x < l+1$, donc $k < l+1$. De même on a $l \leq x < k+1$, donc $l < k+1$. Finalement, on a $l-1 < k < l+1$, donc $k = l$. □

2.2 Valeur absolue

Définition 8

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit sa valeur absolue $|x|$ par :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon.} \end{cases}$$

Remarque. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geq 0$ et $|x| = 0 \iff x = 0$.*

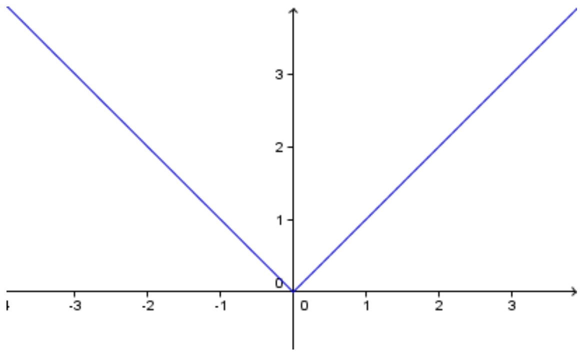

Figure 1 – Graphe de la fonction valeur absolue.

Proposition 9

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $|x| = \sqrt{x^2}$;
2. $|xy| = |x||y|$;
3. Inégalité triangulaire : $|x+y| \leq |x| + |y|$;
4. Inégalité triangulaire inversée : $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

Démonstration. 1. et 2. en exercice.

3. - On a $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$, donc $x + y \leq |x| + |y|$. Donc si $x + y \geq 0$, l'inégalité est vraie.
   - On a $-x \leq |x|$ et $-y \leq |y|$, donc $-(x+y) \leq |x| + |y|$. Donc si $x + y \leq 0$, l'inégalité est vraie également.
4. On écrit $x = (x-y) + y$, donc on a $|x| \leq |x-y| + y$, d'où $|x| - |y| \leq |x-y|$. En interchangeant les rôles, on obtient $|y| - |x| \leq |y-x|$. On a donc fini, puisque $|y-x| = |x-y|$.

□

3 Bornes supérieures et inférieures

On a vu les définitions des notions de min et de max. Mais ces éléments n'existent pas toujours ! Par exemple :

1. $\mathbb{R}$ n'admet ni maximum, ni minimum ;
2. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, x < \pi\}$ n'admet pas de maximum ;
3. L'intervalle ouvert $]a, b[$ n'admet ni maximum, ni minimum ;
4. Le minimum de $[0, 1[$ est 0, et il n'y a pas de maximum.

Dans $\mathbb{R}$, on peut résoudre ce problème en utilisant les notions de majorant (resp. minorant) et de borne supérieure (resp. inférieure).

Définition 10

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
- Un réel M est un **majorant** de A si pour tout $x \in A$, $x \leq M$.
- Un réel m est un **minorant** de A si pour tout $x \in A$, $x \geq m$.

Remarque. *Attention ! Majorants et minorants ne sont pas uniques et n'appartiennent pas forcément à l'ensemble qu'ils majorent ou minorent !*

Exemples :

1. $[0, 1]$ admet 1 pour majorant. Mais 28 en est aussi un. En fait tout nombre supérieur ou égal à 1 en est un.
2. $[0, +\infty[$ admet tous les réels négatifs comme minorants, mais n'a pas de majorant.

Définition 11

Soit $A \in \mathbb{R}$ non vide.
- La **borne supérieure** de A, notée $\sup(A)$, est le plus petit élément (minimum) de l'ensemble $B = \{x \in \mathbb{R}, x \text{ est un majorant de } A\}$. C'est le plus petit des majorants.
- La **borne inférieure** de A, notée $\inf(A)$, est le plus grand élément (maximum) de l'ensemble $B' = \{x \in \mathbb{R}, x \text{ est un minorant de } A\}$. C'est le plus grand des minorants.

Remarque. *Ces bornes n'existent pas toujours. On a vu par exemple que $\mathbb{R}$ n'admet pas de borne supérieure.*

Exemples :

1. $\sup[0, 1] = 1$, $\inf[0, 1] = 0$;
2. $\sup]0, 2[= 2$, $\inf]0, 2[= 0$;
3. $\inf(\mathbb{R}_+) = 0$. Le sup n'existe pas.

Théorème 12

- Toute partie de $\mathbb{R}$ **non vide** et **majorée** admet une borne supérieure ;
- Toute partie de $\mathbb{R}$ **non vide** et **minorée** admet une borne inférieure.

Démonstration. Vous pouvez lire la preuve dans le livre de L1 de Pierre Guillot, chapitre 2, théorème 2.9. Le pdf du livre est en téléchargement libre sur la page web de l'auteur (tapez "pierre guillot maths"). □

Exemple : Considérons $A = \left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Le min de A est 0, atteint pour $n = 1$. Le max n'existe pas. Montrons que le sup est 1.
Soit M un majorant de A. Alors pour tout $n > 0$, on a $1 - \frac{1}{n} \leq M$, donc $1 \leq M + \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M$. Donc $M \geq 1$. Réciproquement, tous les $M \geq 1$ sont des majorants. Ainsi, l'ensemble des majorants est $[1, +\infty[$. D'où $\sup(A) = 1$.

Proposition 13

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors $\sup(A)$ est l'unique réel tel que :

1. si $x \in A$, alors $x \leq \sup(A)$;
2. pour tout $y < \sup(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y < x \leq \sup(A)$.

Démonstration. Montrons que $\sup(A)$ vérifie 1 et 2. $\sup(A)$ est un majorant de A, donc le point 1 est vérifié. Soit $y < \sup(A)$. y n'est pas un majorant de A, puisquesup(A) en est le plus petit. Le point 2 est donc vérifié.

Réciproquement, montrons que si $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifie les points 1 et 2, alors $\alpha = \sup(A)$.
Le point 1 assure que α est un majorant de A. Supposons par l'absurde que α ne soit pas le plus petit des majorants. Il existe donc y tel que pour tout $x \in A$, $x \leq y < \alpha$. Mais le point 2 montre qu'il existe un élément de A plus grand que y, donc y n'est pas un majorant de A, contradiction. Ainsi, α est le plus petit des majorants, donc $\alpha = \sup(A)$. $\square$

Remarque :
Bien que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ soient tous deux infinis, il y a considérablement plus de réels que de rationnels. En fait $\mathbb{Q}$ est **dénombrable**, ce qui signifie que l'on peut compter ses éléments (en termes savants, on peut trouver une bijection $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$). En revanche, cela n'est pas possible avec $\mathbb{R}$: comment feriez-vous pour compter les réels ? Si les nombres naturels, relatifs et rationnels sont connus depuis très longtemps, les premières vraies constructions de $\mathbb{R}$ sont beaucoup plus récentes. Le besoin d'avoir une définition rigoureuse de la notion de borne supérieure (et inférieure) a justifié ces constructions. Les constructions de $\mathbb{R}$ les plus connues datent des années 1860-1870 : la méthode des coupures de Dedekind et méthode des suites de Cauchy. Il en existe de nombreuses autres.

Exercice :

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}; \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$
2. Soient A, B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On définit $A + B := \{a + b, \quad a \in A, \quad b \in B\}$. Montrer que $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$, puis que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
3. Trouver les majorants, minorants, max, min, sup et inf de :
   (a) $[0, 1] \bigcap \mathbb{Q}$
   (b) $]0, 1[\bigcap \mathbb{Q}$
   (c) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$